

## EXERCICE N1

1) a)  $D_f = \mathbb{R}$ , donc si  $x \in D_f$  alors  $-x \in D_f$ ;  $f(-x) = |-x-2| - |-x+2| = |x+2| - |x-2| = -f(x)$  donc  $f$  est impaire.

2) c)  $M \in \Gamma \Leftrightarrow (\overline{MA} + \overline{MB}) \perp (\overline{MA} - \overline{MB}) \Leftrightarrow (\overline{MA} + \overline{MB}) \cdot (\overline{MA} - \overline{MB}) = 0 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \Gamma$  est la médiatrice de  $[AB]$ .

3) a) Soient  $a$  et  $b$  deux réels de l'intervalle  $]0; +\infty[$  tels que  $a < b$  alors  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$  et  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

par suite  $\sqrt{a} - \frac{1}{a} < \sqrt{b} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow g(a) < g(b)$  donc  $g$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

4) b)  $h(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$ ;  $h(0) = 0 \leq h(x) \forall x \in D_h$  donc  $0$  est le minimum de  $h$  sur  $D_h$ .

## EXERCICE N2

A) 1)  $f(x) = \frac{1-5x}{2x^2+x+1}$ .  $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que : } 2x^2+x+1 \neq 0\}$

on pose :  $2x^2+x+1=0$ ;  $\Delta = 1-8 = -7 \Rightarrow 2x^2+x+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  donc  $D_f = \mathbb{R}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{2x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{2x} = 0$

Interprétation :  $(C_f)$  admet une asymptote horizontale d'équation :  $y=0$  aux voisinages de  $+\infty$  et  $-\infty$ .

3)  $f(x)+1 = \frac{1-5x}{2x^2+x+1} + 1 = \frac{1-5x+2x^2+x+1}{2x^2+x+1} = \frac{2x^2-4x+2}{2x^2+x+1} = \frac{2(x^2-2x+1)}{2x^2+x+1} = \frac{2(x-1)^2}{2x^2+x+1} \geq 0$ .

$\Leftrightarrow -1 \leq f(x) \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \forall x \in D_f \Leftrightarrow 1$  est le minimum de  $f$  sur  $D_f$ .

4) a)  $7f(x) - 25 = \frac{7-35x}{2x^2+x+1} - 25 = \frac{7-35x-50x^2-25x-25}{2x^2+x+1} = \frac{-50x^2-60x-18}{2x^2+x+1}$   
 $= \frac{-2(25x^2+30x+9)}{2x^2+x+1} = \frac{-2(5x+3)^2}{2x^2+x+1} \leq 0 \Leftrightarrow 7f(x) - 25 \leq 0 \forall x \in D_f$ .

b)  $7f(x) - 25 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{25}{7} \Leftrightarrow f(x) \leq f(-\frac{3}{5}) \forall x \in D_f \Leftrightarrow \frac{25}{7}$  est le maximum de  $f$  sur  $D_f$ .

B) 1) a)  $f(x)=1$ ,  $(C_f) \cap (\Delta: y=1) = \{A(-3, 1); B(0, 1)\} \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \{-3, 0\}$

b)  $-1 < f(x) \leq 1$ , les solutions sont les abscisses des points de  $(C_f)$  situés strictement au dessus de la droite d'équation :  $y = -1$  et au dessous de la droite d'équation :  $y = 1$  donc  $S_{\mathbb{R}} = ]-\infty; -3] \cup [0; +\infty[ \setminus \{1\}$ .

2) \*  $x \mapsto \frac{ax+d+z}{x+4}$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$  en particulier sur  $] -\infty; -3[ \setminus \{-4\}$ .

\*  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $[-3; 1[$ .

\*  $x \mapsto 2\sqrt{x^2+3}+ax+b$  est définie sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $]1; +\infty[$

Conclusion :  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$



في دارك... إتهون على قرابتة إصغارك

$$3) \lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{ax+b+2}{x+4} = -3a+b+2 ; \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$$

$$g \text{ admet une limite en } -3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) \Leftrightarrow -3a+b+2 = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 ; \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{x^2+3+ax+b} = 4+a+b$$

$$g \text{ admet une limite en } 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \Leftrightarrow 4+a+b = -1 \quad (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 4a+2 = -2 \Leftrightarrow 4a = -4 \Leftrightarrow a = -1, (1) \Rightarrow 3+b+2=1 \Leftrightarrow b = -4$$

C) Pour la suite on prend :  $a = -1$  et  $b = -4$ .

$$1) \lim_{x \rightarrow -4^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left(-\frac{x+2}{x+4}\right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -4^+} (x+4) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(-\frac{x+2}{x+4}\right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -4^-} (x+4) = 0^-$$

Interprétation : (Cg) admet une asymptote verticale d'équation :  $x = p$ .

$$2) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (x-4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x^2+3} - x - 4 - (x-4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x^2+3} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{x^2+3} - x)$$

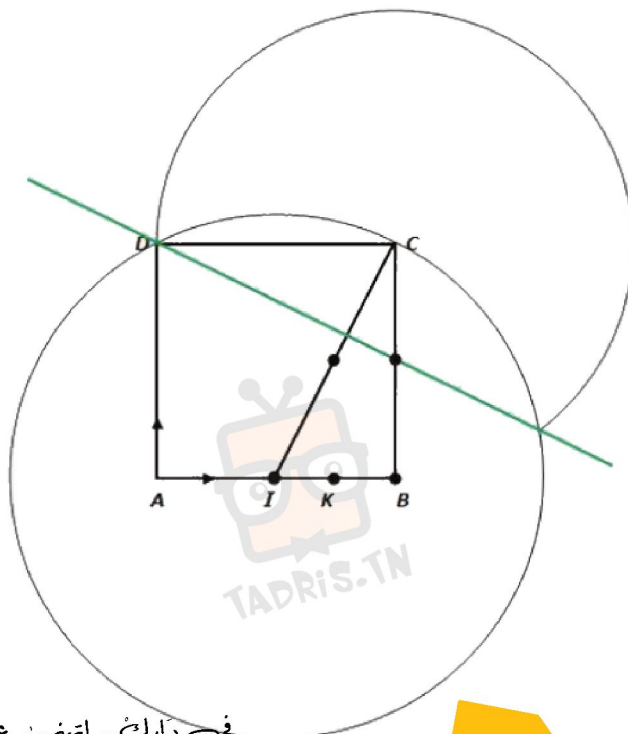
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\left(\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$$

Par suite (Cg) admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote oblique  $\Delta : y = x - 4$ .

b) Pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ,  $g(x) - y = \frac{6}{\sqrt{x^2+3}+x} > 0$  donc (Cg) est au dessus de  $\Delta$  sur  $]1; +\infty[$ .

### EXERCICE N3

A). 1)



في دارك... إتهون على قرابتة إصغارك

$$2) * \overline{BI} \cdot \overline{BJ} = \overline{BI} \cdot \overline{BK} [J=I * C \text{ et } K=I * B \Rightarrow (JK) \square (BC) \text{ or } (BC) \perp (IB) \text{ donc } K \text{ est le projeté } \perp \text{ de } J \text{ sur } (IB)] \\ = BI \cdot BK = 2$$

$$* \overline{BC} \cdot \overline{BJ} = \overline{BC} \cdot \overline{BH} [J=I * C \text{ et } H=B * C \Rightarrow (JH) \square (IB) \text{ or } (IB) \perp (BC) \text{ donc } H \text{ est le projeté } \perp \text{ de } J \text{ sur } (BC)] \\ = BC \cdot BH = 4 \cdot 2 = 8$$

A).

$$* \overline{CI} \cdot \overline{JD} = (\overline{CB} + \overline{BI}) \cdot (\overline{JB} + \overline{BD}) = \overline{BC} \cdot \overline{BJ} - \overline{BC} \cdot \overline{BD} - \overline{BI} \cdot \overline{BJ} + \overline{BI} \cdot \overline{BD} \\ = 8 - BC^2 - 2 + BI \cdot BA = 8 - 16 - 2 + 8 = -2$$

B) Soit  $\Delta = \{ M \in P \text{ tels que : } 2 MC^2 - MA^2 - MB^2 = -16 \}$ .

1) a) I est le milieu de [AB] d'après la formule de la médiane

$$\text{Pour tout } M \in P, MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2 MI^2 + 8.$$

$$b) 2 MC^2 - MA^2 - MB^2 = 2 MC^2 - (MA^2 + MB^2) \\ = 2 MC^2 - (2 MI^2 + 8) = 2 (MC^2 - MI^2) - 8 \\ = 2 (\overline{MC} - \overline{MI}) \cdot (\overline{MC} + \overline{MI}) - 8 \\ = 2 \overline{IC} (\overline{MJ} + \overline{JC} + \overline{MJ} + \overline{JI}) - 8 = 4 \overline{CI} \cdot \overline{JM} - 8.$$

$$2) a) 2 DC^2 - DA^2 - DB^2 = 4 \overline{CI} \cdot \overline{JD} - 8 = -8 - 8 = -16 \Leftrightarrow D \in \Delta$$

$$b) M \in \Delta \Leftrightarrow 2 MC^2 - MA^2 - MB^2 = -16 \Leftrightarrow 4 \overline{CI} \cdot \overline{JM} - 8 = -16$$

$$\Leftrightarrow 4 \overline{CI} \cdot (\overline{JD} + \overline{DM}) = -8 \Leftrightarrow \overline{CI} \cdot \overline{JD} + \overline{CI} \cdot \overline{DM} = -2 \Leftrightarrow -2 + \overline{CI} \cdot \overline{DM} = -2 \Leftrightarrow \overline{CI} \cdot \overline{DM} = 0 \\ \Leftrightarrow \overline{CI} \perp \overline{DM} \Leftrightarrow \Delta \text{ est la droite passante par } D \text{ et perpendiculaire à } (IC).$$

3) a) Construction du point E.

$$b) 2 EC^2 - EA^2 - EB^2 = 2 DC^2 - (EA^2 + EB^2) = 32 - (2 EI^2 + 8) = 32 - (2 DI^2 + 8) = 32 - 2 (DA^2 + AI^2) - 8 \\ = 24 - 2 (16 + 4) = -16 \Leftrightarrow E \in \Delta$$

C) 1) Le point C(4, 4) dans le repère R donc  $(\mathcal{C}) : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$ .

$$2) I(2, 0), (IC) \perp \Delta \Leftrightarrow \overline{IC} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ est un vecteur normal à } \Delta \text{ donc } \Delta : x + 2y + c = 0 \text{ or } D(0, 4) \in \Delta$$

$$\text{alors } 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8 \text{ d'où } \Delta : x + 2y - 8 = 0.$$

$$3) E(x, y) \in \Delta \cap (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 & (1) \\ x + 2y - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x = 8 - 2y, \text{ on change } x \text{ dans } (1) (4 - 2y)^2 + (y - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow 5y^2 - 24y + 16 = 0$$

$$\Delta = 24^2 - 20 \cdot 16 = 256 = 16^2 \text{ donc } y = 4 \text{ ou } y = \frac{4}{5}.$$

$$y = 4 \Rightarrow x = 0 \text{ donnent le point } D(0, 4) \text{ et } y = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{32}{5} \text{ donnent le point } E\left(\frac{32}{5}, \frac{4}{5}\right)$$